Temat

Postać kanoniczna i ogólna funkcji kwadratowej

1 klasa liceum
na podbudowie szkoły podstawowej

Cel ogólny

Wykształcenie umiejętności rozpoznawania postaci kanonicznej i postaci ogólnej funkcji kwadratowej.

Cele szczegółowe

Uczeń:

- podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej i ogólnej,
- oblicza wyróżnik trójmianu kwadratowego i współrzędne wierzchołka paraboli,
- przekształca postać kanoniczną funkcji do postaci ogólnej i postać ogólną do kanonicznej.

Przypomnienie

Na ostatniej lekcji nauczyliśmy się:

- ✓ podawać wzór funkcji $f(x) = ax^2$ przesuniętej o wektor,
- ✓ szkicować wykres funkcji $f(x) = a(x-p)^2+q$ i określać jej własności,
- ✓ stosować własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2+q$ do rozwiązywania zadań.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Postacią kanoniczną funkcji kwadratowej nazywamy postać:

$$\boldsymbol{y = a(x - p)^2 + q},$$

gdzie $a, p, q \in R$, $a \neq 0$.

Postać ogólna funkcji kwadratowej

Postacią ogólną funkcji kwadratowej nazywamy postać:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c},$$

gdzie $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zadanie 1

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej:

a) $y = -2(x+3)^2 + 5$,

b) $y = 4(x-2)^2 - 6$.

Zadanie 1 – rozwiązanie

a) *Postać ogólna:* $y = ax^2 + bx + c$

Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$y = -2(x + 3)^2 + 5 = -2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) + 5 =$$
$$= -2(x^2 + 6x + 9) + 5 = -2x^2 - 12x - 18 + 5 =$$
$$= -2x^2 - 12x - 13$$

Postać ogólna: $y = -2x^2 - 12x - 13.$

Zadanie 1 – rozwiązanie

b) *Postać ogólna:* $y = ax^2 + bx + c$

Kwadrat różnica: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$y = 4(x - 2)^2 - 6 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 6 =$$
$$= 2(x^2 - 4x + 4) - 6 = 2x^2 - 8x + 8 - 6 =$$
$$= 2x^2 - 8x + 2$$

Postać ogólna: $y = 2x^2 - 8x + 2.$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego

Wyróżnikiem funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego) $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ nazywamy wyrażenie:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Zadanie 2

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8.$$

Zadanie 2 – rozwiązanie

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8, \quad a = -\frac{1}{2}, \quad b = 4, \quad c = 8$$

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

$$\triangle = 4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8 = 16 + 16 = 32$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego wynosi 32.

Współrzędne wierzchołka paraboli

Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ ma wierzchołek w punkcie $W = (p, q)$, w którym:

$$\boldsymbol{p = -\frac{b}{2a}}, \qquad \boldsymbol{q = -\frac{\triangle}{4a}}$$

Zadanie 3

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $y = x^2 - 2x - 1$.

Zadanie 3 – rozwiązanie

$$y = x^2 - 2x - 1,\ \ a = 1,\ \ b = -2,\ \ c = -1,\ \ \ W = (p, q)$$

$$\triangle = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$q = -\frac{\triangle}{4a} = -\frac{8}{4 \cdot 1} = -\frac{8}{4} = -2$$

Współrzędne wierzchołka paraboli: $W = (1, -2)$.

Zadanie 4

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej:

a) $y = -x^2 + x - 2$,

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$.

Zadanie 4 – rozwiązanie

a) $y = -x^2 + x - 2,\ \ a = -1,\ \ b = 1,\ \ c = -2,\ \ \ y = a(x-p)^2 + q$

$$\triangle = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1 - 8 = -7$$

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{\triangle}{4a} = -\frac{-7}{4 \cdot (-1)} = -\frac{-7}{-4} = -1\frac{3}{4}$$

$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{3}{4}$$

Postać kanoniczna funkcji: $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{3}{4}$.

Zadanie 4 – rozwiązanie

b) $y = 2x^2 - 2x + 1,\ \ a = 2,\ \ b = -2,\ \ c = 1,\ \ y = a(x-p)^2 + q$

$\triangle = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4$

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 2} = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$

$q = -\frac{\triangle}{4a} = -\frac{-4}{4 \cdot 2} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Postać kanoniczna funkcji: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$.

Zadanie 5

Oblicz współczynniki b i c i zapisz wzór funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiadomo, że punkt $W = (3, -2)$ jest wierzchołkiem paraboli będącej jej wykresem.

Zadanie 5 – rozwiązanie

$f(x) = x^2 + bx + c, \quad a = 1, \quad W = (3, -2), \quad p = 3, \quad q = -2$

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$3 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$$

$$b = -6$$

$$f(x) = x^2 - 6x + c$$

$$-2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + c$$

$$c = 7$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 7$$

Wzór funkcji: $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

Podsumowanie

Na dzisiejszej lekcji nauczyliśmy się:

- ✓ wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej i ogólnej,
- ✓ obliczać wyróżnik trójmianu kwadratowego
- ✓ i współrzędne wierzchołka paraboli,
- ✓ przekształcać postać kanoniczną funkcji do postaci ogólnej i postać ogólną do kanonicznej.

Dziękuję za uwagę

mgr Zbigniew Bahr

konsultacja: mgr Anna Drotlew